БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНФОРМАТИКИ И РАДИОЭЛЕКТРОНИКИ

Кафедра программного обеспечения информационных технологий

Факультет ФНиДО

Специальность ПОИТ

Контрольная работа №2

по дисциплине «Дискретная математика»

Тема: «Алгебра логик»

Вариант 11

Выполнила: Карпеко Н. Г.

Договор № 941 от 20.02.2019 г.

Минск 2020

Вариант 11 (941 mod 30 =11).

**Задание 1.** Булева функция φ(a, b, c) задана как суперпозиция некоторых функций φi(x, y) (список функций φi см. в Таблице 1 методических указаний по выполнению КР№2).

1) По заданной суперпозиции получить соответствующее логическое выражение;

2) Получить таблицу значений заданной функции;

3) Получить СДНФ, СКНФ, СПНФ заданной функции;

4) Получить представление заданной функции в виде минимальных ДНФ и КНФ;

5) Получить представление заданной функции в виде сокращенной БДР. По сокращенной БДР записать представление функции:

‒ с помощью оператора IF-THEN-ELSE (ITE-представление);

‒ в виде ДНФ (максимально упростить найденную ДНФ, если это возможно);

‒ в виде КНФ (максимально упростить найденную КНФ, если это возможно).

Выражение, задающее функцию: **φ8(φ4(a, φ9(c, b)), φ1(c, φ3(b, a))).**

**Задание 2.** Булева функция f(a, b, c, d) задана своими значениями. Используя метод Куайна-Мак-Класки, найти минимальную ДНФ этой функции.

**f(a,b,c,d) = (0001 0001 1110 1111).**

**Задание 3.** Дан трехместный предикат P(x,y,z). Предметные переменные x, y, z принимают значения соответственно из предметных областей Mx, My, Mz.

а) Подобрать предметные области Mx, My, Mz, каждую мощности не меньше двух, таким образом, чтобы приблизительно в половине случаев предикат P(x,y,z) был выполним. Во всех дальнейших пунктах использовать эти предметные области.

б) Путем фиксации значения одной из предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала выполнимый, а затем тождественно ложный двухместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

в) Путем фиксации значений двух предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала тождественно истинный, а затем тождественно ложный одноместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

г) Путем фиксации значений всех предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала ложное, а затем истинное высказывание (нульместный предикат).

д) Проверить истинность заданных высказываний, полученных из P(x,y,z) путем связывания всех предметных переменных кванторами. Пояснить полученные результаты.

**P(x,y,z) = x ⋅ y ≥ z;**

Высказывания: **∀x∃y∀zP(x,y,z); ∃z∀x∀yP(x,y,z).**

**Задание 1.**

**Решение.**

1) По заданной суперпозиции получить соответствующее логическое выражение.

**φ(a, b, c) = φ8(φ4(a, φ9(c, b)), φ1(c, φ3(b, a)))**

Аргументы вложенных функций первого уровня:

**φ4(a, φ9(c, b)); φ1(c, φ3(b, a))**

Аргументы вложенных функций второго уровня **(φ9, φ3):**

**φ9(c, b) = c** ~ **b; φ3(b, a) = b;**

**φ4(a, φ9(c, b)) = a ∧ (c ~ b);**  **φ1(c, φ3(b, a)) = c ∧ b;**

**φ(a, b, c) = φ8(φ4(a, φ9(c, b)), φ1(c, φ3(b, a))) = (a ∧ (c ~ b)) ⊕ (c ∧ b).**

2) Получить таблицу значений заданной функции. Определить порядок выполнения операций (один из возможных):

Заполним таблицу значений функции, последовательно подставляя каждый набор значений аргументов в выражение, например,

**φ(0, 0, 1) = (a ∧ (c ~ b)) ⊕ (c ∧ b) = (0 ∧ (1 ~ 0)) ⊕ (1 ∧ 0) = (0∧0) ⊕ 0 = 0**. …….

**φ(1, 1, 1) = (a ∧ (c ~ b)) ⊕ (c ∧ b) = (1 ∧ (1 ~ 1)) ⊕ (1 ∧ 1) = (1 ∧ 1) ⊕ (1 ∧ 1) =**

**= 1 ⊕ 1 = 0.**

Порядок выполнения операций и таблица значений:

2 1 4 3

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| A | b | c | **(a ∧ (c ~ b)) ⊕ (c ∧ b)** | | |
| 0 | 0 | 0 | 0 1 | **0** | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 0 | **0** | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 0 | **0** | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 1 | **1** | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 1 | **1** | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 0 | **0** | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 0 | **0** | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 1 | **0** | 1 |

**φ(a, b, c) = (0 0 0 1 1 0 0 0)**.

3) Получить СДНФ, СКНФ, СПНФ заданной функции;

Вместо знака «**∧» (**конъюнкция**)** используем знак «⋅».

Для получения **СДНФ**. Наборы, где функция принимает значение 1:

**(0,1,1), (1,0,0,).**

**СДНФ: a ⋅ b ⋅ c ∨ a ⋅ b ⋅ c**.

Для получения **СКНФ**. Наборы, на которых функция принимает значение =0:

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).

**a ∨ b ∨ c, a ∨ b ∨ c**, **a ∨ b ∨ c, a ∨ b ∨ c, a ∨ b ∨ c, a ∨ b ∨ c.**

(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1).

**СКНФ**:

**(a ∨ b ∨ c) ⋅ (a ∨ b ∨ c**) **⋅** (**a ∨ b ∨ c) ⋅ (a ∨ b ∨ c) ⋅ (a ∨ b ∨ c) ⋅ (a ∨ b ∨ c).**

**Для получения СПНФ** воспользуемся найденной СДНФ функцией. Сделаем замену по правилу: **x = x ⊕ 1.**

**a ⋅ b ⋅ c ∨ a ⋅ b ⋅ c** = **(a⊕1) ⋅ b ⋅ c ⊕ a ⋅ (b ⊕ 1) ⋅ (c ⊕ 1)** = **~~a⋅b⋅c~~ ⊕ b ⋅ c ⊕ ~~a⋅b⋅c~~ ⊕ a ⋅ b ⊕ a ⋅ c ⊕ a = b ⋅ c ⊕ a ⋅ b ⊕ a ⋅ c ⊕ a.**

4) Получить представление заданной функции в виде минимальных ДНФ и КНФ;

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ab\с | 0 | 1 |
| 0 0 |  |  |
| 0 1 |  | 1 |
| 1 1 |  |  |
| 1 0 | 1 |  |

Минимальная **ДНФ**: **a ⋅ b ⋅ c ∨ a ⋅ b ⋅ c.**

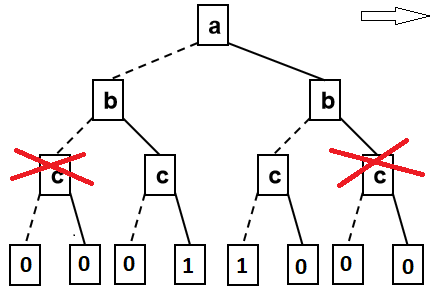
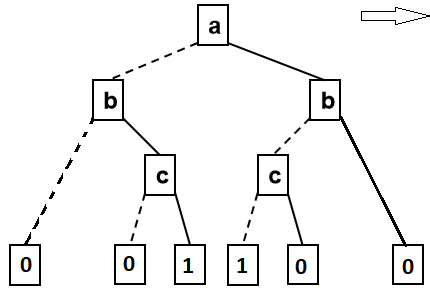
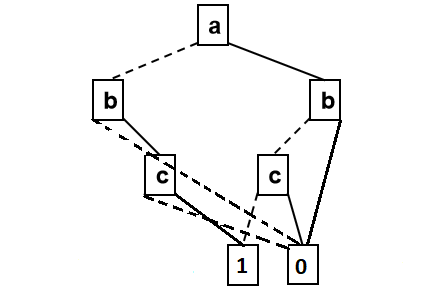
|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ab\с | 0 | 1 |
| 0 0 | **0** **(1)** | **0 (2)** |
| 0 1 | **0**  **(3)** |  |
| 1 1 | **0**  **(5)** | **0 (6)** |
| 1 0 |  | 0 (4) |

Минимальная **КНФ**:

**(a ∨ c) ⋅ (b ∨ c) ⋅ (a ∨ b) ⋅ (a ∨ b ∨ c) ⋅ (a ∨ c).**

5) Получить представление заданной функции в виде сокращенной БДР.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| a | b | C | φ(x,y,z) |
| 0 | 0 | 0 | **0** |
| 0 | 0 | 1 | **0** |
| 0 | 1 | 0 | **0** |
| 0 | 1 | 1 | **1** |
| 1 | 0 | 0 | **1** |
| 1 | 0 | 1 | **0** |
| 1 | 1 | 0 | **0** |
| 1 | 1 | 1 | **0** |

**ДНФ**: **a ⋅ b ⋅c ∨ a ⋅ b ⋅c** – результат.

ITE- представление для заданной функции:

IF a THEN

IF b THEN {правая ветка}

f := FALSE

ELSE

IF c THEN

f := TRUE

ELSE

f := FALSE

ELSE

IF b THEN {лев ветка}

f := FALSE

ELSE

IF c THEN

f := TRUE

ELSE

f := FALSE

**Задание 2.** Булева функция **f(a, b, c, d)** задана своими значениями. Используя метод Куайна-Мак-Класки, найти минимальную ДНФ этой функции.

**f(a, b, c, d) = (0001 0001 1110 1111)**

**Решение.**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| a | b | c | d | f(a,b,c,d) |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 (0) |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | **1 (1)** |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 (2) |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 (3) |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 (4) |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 (5) |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 (6) |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 (7) |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 (8) |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Таблица 1 | | Таблица 2 | | Таблица 3 | | Таблица 4а | | Таблица 4б | | Таблица 5 | |
| 0 | 0011 | 2 | 1000 | 2,3 | 100- | 2,3 | 100- | 2,3 | 100- | 2,5,4,7 | 1--0 |
| 1 | 0111 | 0 | 0011 | 2,4 | 10-0 | 5,6 | 110- | 5,6,7,8 | 11-- | 0,1 | 0-11 |
| 2 | 1000 | 3 | 1001 | 2,5 | 1-00 | 7,8 | 111- | 2,4 | 10-0 | 3,6 | 1-01 |
| 3 | 1001 | 4 | 1010 | 0,1 | 0-11 | 2,4 | 10-0 | ~~5,7,6,8~~ | ~~11--~~ | 1,8 | -111 |
| 4 | 1010 | 5 | 1100 | 3,6 | 1-01 | 5,7 | 11-0 | 2,5,4,7 | 1--0 |  |  |
| 5 | 1100 | 1 | 0111 | 4,7 | 1-10 | 6,8 | 11-1 | 0,1 | 0-11 |  |  |
| 6 | 1101 | 6 | 1101 | 5,6 | 110- | 2,5 | 1-00 | 3,6 | 1-01 |  |  |
| 7 | 1110 | 7 | 1110 | 5,7 | 11-0 | 0,1 | 0-11 | 1,8 | -111 |  |  |
| 8 | 1111 | 8 | 1111 | 1,8 | -111 | 3,6 | 1-01 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 6,8 | 11-1 | 4,7 | 1-10 |  |  |  |  |
|  |  |  |  | 7,8 | 111- | 1,8 | -111 |  |  |  |  |

6. Записать элементарные конъюнкции, соответствующие существенным наборам:

Элементарные конъюнкции:

|  |  |
| --- | --- |
| 1--0 | **a ⋅ d** |
| 0-11 | **a ⋅ c ⋅ d** |
| 1-01 | **a ⋅ c ⋅ d** |
| -111 | **b ⋅ c ⋅ d** |

Минимальная ДНФ: **a ⋅ d ∨ a ⋅ c ⋅ d ∨ a ⋅ c ⋅ d ∨ b ⋅ c ⋅ d.**

**Задание 3.** Дан трехместный предикат **P(x,y,z) = y ≥ x + z**. Предметные переменные **x, y, z** принимают значения соответственно из предметных областей **Mx, My, Mz**.

а) Подобрать предметные области Mx, My, Mz, каждую мощности не меньше двух, таким образом, чтобы приблизительно в половине случаев предикат P(x,y,z) был выполним. Во всех дальнейших пунктах использовать эти предметные области.

б) Путем фиксации значения одной из предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала выполнимый, а затем тождественно ложный двухместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

в) Путем фиксации значений двух предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала тождественно истинный, а затем тождественно ложный одноместный предикат (если это невозможно сделать в заданных предметных областях, то объяснить, почему).

г) Путем фиксации значений всех предметных переменных получить из P(x,y,z) сначала ложное, а затем истинное высказывание (нульместный предикат).

д) Проверить истинность заданных высказываний, полученных из P(x,y,z) путем связывания всех предметных переменных кванторами. Пояснить полученные результаты.

P(x,y,z) **= x ⋅ y ≥ z;**

Высказывания: **∀x∃y∀zP(x,y,z); ∃z∀x∀yP(x,y,z).**

**Решение.**

а) Пусть **Mx = {1,2,3}, My = {2,3,4}, Mz = {4,5}.**

**P(1,2,4) = Л, т.к. 1 ⋅ 2 < 4;** – ложное утверждение. Аналогичным образом получаем:

P(**1,2,4**) = Л, P(**1,2,5**) = Л, P(**1,3,4**) = Л, P(**1,3,5**) = Л, P(**1,4,4**) = И, P(**1,4,5**) = Л,

P(**2,2,4**) = И, P(**2,2,5**) = Л, P(**2,3,4**) = И, P(**2,3,5**) = И, P(**2,4,4**) = И, P(**2,4,5**) =И,

P(**3,2,4**) = И, P(**3,2,5**) = И, P(**3,3,4**) = И, P(**3,3,5**) = И, P(**3,4,4**) =И, P(**3,4,5**) =И.

Требование о том, чтобы на выбранных предметных областях предикат был выполним хотя бы в половине случаев, соблюдается, значит, предметные области подобраны правильно.

Рассмотрим крайние случаи, исходя из вида предиката:

при фиксации переменной y наименьшим значением (2) предикат P(x,2,z) примет значение ИСТИНА при x=2, z= 4; (P(**2,2,4**) = И) ;

при фиксации переменной x наибольшим значением (3) предикат P(3,y,z) примет значение ИСТИНА при y = 4, z = 4; (P(**3,4,4**) = И) ;

при фиксации переменной z наибольшим значением (5) предикат P(x,y,5) примет значение ИСТИНА, например, при y=5, x=2; (P(**3,2,5**) = И)

б) Двухместный предикат P(x,y,4) выполним, так как, например, P(**2,3,4**) = И.

Получить из P(x,y,z) тождественно ложный двухместный предикат на заданных предметных областях невозможно.

Рассмотрим крайние случаи, исходя из вида предиката:

при фиксации переменной y наименьшим значением (3) предикат P(x,3,z) примет значение ИСТИНА при x=2, z=1;

при фиксации переменной x наибольшим значением (4) предикат P(4,y,z) примет значение ИСТИНА при y=5, z=1;

при фиксации переменной z наибольшим значением (2) предикат P(x,y,2) примет значение ИСТИНА, например, при y=5, x=2.

в) P(x,4,4) – тождественно истинный одноместный предикат, т.к.

P(**1,4,4**) = И, P(**2,4,4**) = И, P(**3,4,4**) = И.

P(x,2,5) – тождественно ложный одноместный предикат, т.к P(**1,2,5**) = Л, P(**2,2,5**) = Л.

г) Ложное и истинное высказывания: P(1,2,5) = Л, P(1,4,4) = И.

д) Проверить истинность заданных высказываний, полученных из P(x,y,z) путем связывания всех предметных переменных кванторами. Пояснить полученные результаты. Высказывания: **∀x∃y∀zP(x,y,z); ∃z∀x∀yP(x,y,z).**

**∀x∃y∀zP(x,y,z) = ∀x(∃y(∀zP(x,y,z))) =**

**= ∀x(∃y(P(x,y,4) ∧** **P(x,y,5))) =**

**= ∀x((P(x,2,4) ∧** **P(x,2,5)) ∨ (P(x,3,4) ∧** **P(x, 3,5)) ∨ (P(x,4,4) ∧** **P(x,4,5))) =**

**= ((P(1,2,4)** ∧ **P(1,2,5)** ∨ **(P(1,3,4)** ∧ **P(1,3,5)** ∨ **(P(1,4,4)** ∧ **P(1,4,5)))** ∧

∧ **((P(2,2,4)** ∧ **P(2,2,5)** ∨ **(P(2,3,4)** ∧ **P(2,3,5)** ∨ **(P(2,4,4)** ∧ **P(2,4,5)))** ∧

∧ **((P(3,2,4)** ∧ **P(3,2,5)** ∨ **(P(3,3,4)** ∧ **P(3,3,5)** ∨ **(P(3,4,4)** ∧ **P(3,4,5))) =**

**= ((Л** ∧ **Л)** ∨ **(Л** ∧ **Л)** ∨ **(И** ∧ **Л))** ∧ **((И** ∧ **Л)** ∨ **(И** ∧ **И)** ∨ **(И** ∧ **И))** ∧ **((И** ∧ **И)** ∨

∨ **(И** ∧ **И)** ∨ **(И** ∧ **И)) = ЛОЖЬ.**

**∃z∀x∀yP(x,y,z) = ∃z(∀x(∀yP(x,y,z))) =**

**= ∃z(∀x(P(x,2,z)** ∧ **P(x,3,z)** ∧ **P(x,4,z))) =**

**= ∃z((P(1,2,z)** ∧ **P(1,3,z)** ∧ **P(1,4,z)) ∧ ((P(2,2,z)** ∧ **P(2,3,z)** ∧ **P(2,4,z)) ∧**

**∧ ((P(3,2,z)** ∧ **P(3,3,z)** ∧ **P(3,4,z))) =**

**= ((P(1,2,4) ∨ (P(1,2,5))** ∧ **(P(1,3, 4) ∨ P(1,3,5))** ∧ **(P(1,4, 4) ∨ P(1,4,5))) ∧**

**∧ ((P(2,2, 4) ∨ P(2,2,5))** ∧ **(P(2,3, 4) ∨ P(2,3,5))** ∧ **(P(2,4, 4) ∨ P(2,4,5))) ∧**

**∧ ((P(3,2, 4) ∨ P(3,2,5))** ∧ **(P(3,3, 4) ∨ P(3,3,5))** ∧ **(P(3,4, 4) ∨ P(3,4,5))) =**

**= ((Л ∨ Л)** ∧ **(Л∨ Л)** ∧ **(И ∨ Л)) ∧ ((И ∨ Л)** ∧ **(И ∨ И)** ∧ **(И∨ И)) ∧**

**∧ ((И ∨ И)** ∧ **(И ∨ И)** ∧ **(И ∨ И)) = ЛОЖЬ.**